# ファジィ環境における意思決定について

## ――ファジィ線形計画法の図解例による考察――

# On the Decision Making process in Fuzzy Environments

(1991年4月3日受理)

上田　仁郎　　大津寄 勝典
Niro Ueda　Katsusuke Otsuki

**Key words:**　ファジィ環境，意思決定，ファジィ線形計画

## 1．はじめに

経営計画の問題には，複数の目標をもつような計画問題が多い。たとえば生産計画，人員計画，財務計画，設備投資計画，資本予算問題などがそうである。これらの計画問題は，多様なファジィ目標とファジィ制約の環境下において意思決定が行われるばあいがある。そのような意思決定の手立てとして，ファジィ多目的計画法とよばれる数学的接近法が開発されている。本稿はH.J. Zimmermannのファジィ多目的線形計画法に焦点をあて，主観的で多様なファジィ目標の設定行動がありうることを数値例で示したのち，目標空間と変数空間においてそれらを図解する。さらに制約条件にファジィ性をもたせたケースを取り上げ，同様の手続きにより検討を加える。そうすることによってファジィ多目的線形計画法により得られる最適解の性質とか，ひいてはこの計画法の構造や性格を明らかにする。

検討の結果，得られた主な内容は次の通りである。

① 希望ベクトルの起点が与えられると，最適解の値を変化させる要因はベクトルのノルムの大小ではなく勾配の変化である。

② 希望ベクトルのすべてが実行可能領域の内部にあるとしても，ベクトルの北東方向への延長線がnoninferior setと交われば，その交点で解が得られる。

③ 希望ベクトルのノルムが大きくなるほど，ベクトルはnoninferior setと交わるがい然性が高まり，それにともない最適解を得ることができる可能性も高まる。

④ 制約条件にファジィ性をもたせても，希望ベクトルと達成ベクトルは同一直線上にあり重なる。また希望ベクトルのノルムに対する達成ベクトルのノルムの比率は$\lambda$の値に等しい。

なお本稿と同じ課題をもってファジィ多目的線形計画法の検討がなされた論文として拙稿〔10〕がある。本稿は主としてその論文の続編をなすものである。

## 2．ファジィ決定

ファジィ線形計画問題について，現在までの流れないしはその成り立ちをおってみよう。

L.A. Zadeh〔13〕は1965年以来ファジィ集合の概念を提案し，その理論を発展させてきた。Zadehに

よって提案されたファジィ集合は，特性関数を一般化したメンバシップ関数を導入することにより特性づけられており，次のように定義されている。

全体集合$X$におけるファジィ集合は，$m_A(X):X\rightarrow[0,\ 1]$なるメンバシップ関数によって特性づけられた集合である。ここでメンバシップ関数の値$m_A(X)$は$A$における$X$の帰属度を表し，$m_A(X)$の値が1に近ければ$X$の$A$に属する度合が大きく，反対に0に近ければ$X$の$A$に属する度合が小さいことを示している。

1970年，R.E. BellmannとZadeh〔1〕は，ファジィ環境における意思決定として，ファジィ目標$G$とファジィ制約$C$を統合した決定集合$D$は，$G$と$C$との積集合であると定義した。すなわち意思決定としてとるべき好ましいファジィ決定$D$は，$D=G\cap C$であると定義され，$D$のメンバシップ関数は

$$m_D(\boldsymbol{x})=\min\ (m_G(\boldsymbol{x}),\ m_C(\boldsymbol{x})) \tag{1}$$

で特性づけられる。なおこのファジィ決定は，min（…）と表されるので最小オペレータと呼ばれている。

つぎに，BellmanとZadehはファジィ決定$D$における意思決定として，最大化決定を提案した。それは$D$のメンバシップ関数値$m_D(\boldsymbol{x})$を最大にするような最大化決定$\boldsymbol{x}^*$を選ぶことであり

$$m_D(\boldsymbol{x}^*)=\max_{x\in X}\ m_D(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

となる$\boldsymbol{x}^*$を求めるものである。

## 3．ファジィ多目的線形計画法

H.J. Zimmermannは，1976年ファジィ目標とファジィ制約のある線形計画問題に対して，それが通常の線形計画問題として解けることを示した。そして1978年には，Zimmermann〔14〕は以下でみるように彼の手法をファジィ多目的線形計画問題に拡張した。

いま，$k$個の目標の達成水準$Z_i$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$）をそれぞれ$Z_i^0$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$）以上にしたいという問題を考えよう。このような多目的計画問題において，希望水準$Z_i^0$にあいまいさをもたせたタイプのファジィ多目的線形計画問題は次のように定式化される。[注1)]

$$\text{目的関数}：Z_i(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_i\geqq Z_i^0\rightarrow\text{満足化}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k) \tag{3}$$

$$\text{制約条件}：\sum_{j=1}^{n}a_{pj}x_j\leqq B_p\quad(p=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{4. a}$$

$$x_j\geqq 0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{4. b}$$

この問題において，各目標に線形関数型メンバシップ関数を適用し，ファジィ決定に最小オペレータを採用すれば，次式で与えられる通常の線形計画問題に帰着される。

$$\text{目的関数}：\lambda\rightarrow\text{最大化} \tag{5}$$

$$\text{制約条件}：\lambda\leqq\frac{Z_i(\boldsymbol{x})-Z_i^m}{Z_i^0-Z_i^m}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k) \tag{6. a}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{pj}x_j\leqq B_p\qquad(p=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{6. b}$$

$$x_j\geqq 0\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{6. c}$$

Zimmermannは，（６．ａ）式右辺の$Z_i^0$と$Z_i^m$の値を次のような方法で決定することを提案している。すなわち，次のような個別の最大化問題を考える。

$$目的関数：Z_i(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \rightarrow 最大化 \quad (7)$$

$$制約条件：\sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \leqq B_p \quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \quad (8.\ a)$$

$$x_j \geqq 0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \quad (8.\ b)$$

これを$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$について解き，最適解を$x_i^0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$，そのときの目的関数値を$Z_i^0$ $(=Z_i(x_i^0))$とする。また，$Z_i^m$を

$$Z_i^m=\min\ (Z_i(x_1^0),\ Z_i(x_2^0),\ \cdots,\ Z_i(x_k^0)) \quad (9)$$

とする。

## ４．ファジィ目標の多様性・ファジィ制約の考慮

このようにZimmermannは$Z_i^0$と$Z_i^m$を直観的にわかりやすい方式で決定することを提案している。しかし希望水準である$Z_i^0$の値，そして各目標のあいまいな部分あるいは許容部分と考えられる$(Z_i^0-Z_i^m)$の値は，意思決定者の主観的判断によって決定されるものである。そうであるからファジィ目標の設定に際して，意思決定者の判断の主観的側面を反映するような任意の$Z_i^0$と$Z_i^m$を提案することが可能であり，そういう意味でファジィ目標の設定の仕方には多様性があると考えられる。

なおZimmermannはファジィ多目的線形計画問題の数値例として，目標にファジィ性をもたせたケースのみを取り上げ，制約条件にファジィ性をもたせたケースを取り上げ検討していない。そこでファジィな制約を考慮したケースを検討するために，そしてまたファジィ目標の多様性を確認するためにも，以下で例示的に数値計算とファジィ決定の図解を行うことにする。その過程でファジィ多目的線形計画法の基本的な考え方の理解を高めることができるであろう。

## ５．目標空間とベクトル概念[注2)]

ファジィ多目的線形計画法により得られる解の性質を調べるために，ひいてはこの計画法の構造や性格を調べるために，「希望ベクトル」と「達成ベクトル」の概念を導入する。

２つの目標の場合を想定する。そうした場合，目標の達成値$Z_1$，$Z_2$を座標軸にした目標空間には，満足点および許容限界点とでもよぶべき次の２点を定義できる。

$$G^0=(Z_1^0,\ Z_2^0)：満足点$$

$$G^m=(Z_1^m,\ Z_2^m)：許容限界点$$

$G^m$を起点とし$G^0$を終点とするこの２点を結んだ有向線分，$\boldsymbol{u}=\overrightarrow{G^mG^0}$を希望ベクトルとよぶことにする。希望ベクトルは２つの目標の総合的な目標方向（各目標の重視の度合）を示している。$Z_1$を横軸，$Z_2$を縦軸にした$Z_1$-$Z_2$平面においては，このベクトルの勾配は$\dfrac{Z_2^0-Z_2^m}{Z_1^0-Z_1^m}$である。またベクトルのノルムは$\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(Z_i^0-Z_i^m)^2}$である。

他方，目標空間には達成点とよばれる点も定義できる。

$$G=(Z_1,\ Z_2)：\text{達成点}$$

$G^m$を起点とし$G$を終点とするこの2点を結んだ有向線分，$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{G^mG}$を達成ベクトルとよぶことにする。達成ベクトルは2つの目標の総合的な達成方向（各目標の実現の度合）を示している。$Z_1$-$Z_2$平面においては，このベクトルの勾配は$\dfrac{Z_2-Z_2{}^m}{Z_1-Z_1{}^m}$である。またベクトルのノルムは$\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(Z_i-Z_i{}^m)^2}$である。

## 6．変数空間と目標空間でのファジィ決定の図解

次のような2目標2変数の数値例を考える。

目的関数：$Z_1=Z_1(\boldsymbol{x})=x_1+5x_2\to$最大化　(10．a)

$Z_2=Z_2(\boldsymbol{x})=5x_1+x_2\to$最大化　(10．b)

制約条件：$9x_1+4x_2\leqq 360$　(11．a)

$4x_1+5x_2\leqq 200$　(11．b)

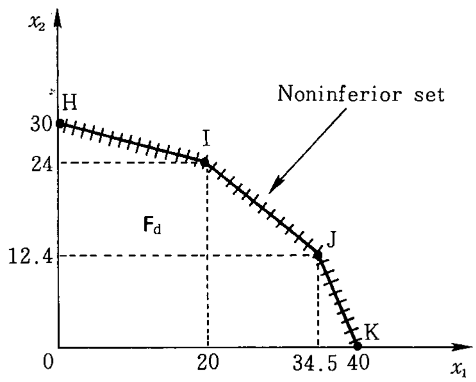
$3x_1+10x_2\leqq 300$　(11．c)

$x_1,\ x_2\geqq 0$　(11．d)

この問題の実行可能領域および noninferior set[注3]は，どのようなものであるかをみておこう。可能領域は**第1図**のとおりである。第1図のグラフの座標軸は決定変数$x_1$と$x_2$で定義される。可能領域は図のなかで$\mathbf{F}_d$と記され，縦軸と横軸そして実線HI，IJ，JKで囲まれた領域である。$\mathbf{F}_d$は変数空間における可能領域である。

$\mathbf{F}_d$の5つの端点は第1図においてH～K，0と記されている。各端点は2つの決定変数と2つの目標値$Z_1$，$Z_2$を与える。というのは変数空間の端点から$Z_1$，$Z_2$の数値を求めれば，目標空間における端点が得られる。このようにして第1図における点H～K，0は，それがもたらす$Z_1$や$Z_2$の値を通じて，**第2図**における点H～K，0に導く。

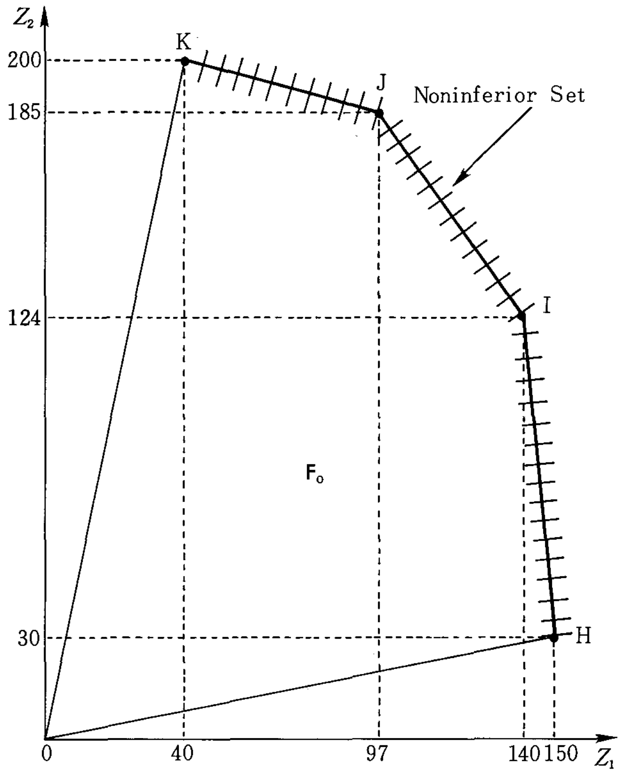
第2図のグラフの座標軸は，目標の達成値$Z_1$，$Z_2$で定義される。各端点は直線で結びつけられる。そしてそれらは変数空間における可能領域の境界線に対応する。可能領域は図のなかで$\mathbf{F}_0$と記されている。$\mathbf{F}_0$は目標空間における可能領域である。




**第1図　変数空間における可能領域とnoninferior set**

目標空間における noninferior set は，$\mathbf{F}_0$の北東側境界線上の網目をつけた部分である。$\mathbf{F}_d$と$\mathbf{F}_0$の関係より，変数空間の noninferior set は，第１図において$\mathbf{F}_d$の境界線上の網目をつけた部分であることがわかる。問題（10．a）〜(11．d）のすべての noninferior solutions（非劣案あるいはパレート解といわれるもの）は，それら noninferior set 上に存在する。

ここに導入した noninferior set の概念そして前述のベクトル概念を用いて，ファジィ多目的線形計画問題の解の性質とか，ひいてはファジィ多目的線形計画法の構造や性格についてをすでに一部報告した[注4)]。本文においてさらに引き続き検討を行うが，以下では目標のみファジィな場合と目標だけでなく制約条件もファジィな場合に区分したうえで検討を行う。




**第２図　目標空間における可能領域と noninferior set**

## 6.1　目標のみファジィな場合のファジィ決定

いま（10．a）式，（10．b）式の目的関数に対して，ファジィ目標の設定が次のように行われたものとする。

ファジィ目標 $G_i$：「$Z_i$の値は$Z_i^m$から$Z_i^0$の範囲にあればよいが，できるだけ$Z_i^0$に近づけたい」

ただし，$Z_i$は目標の達成水準，$Z_i^0$は希望水準であり，$Z_i^m$は許容限界水準とでもよぶべきものである。

このファジィ目標を規定するメンバシップ関数$m_{Gi}$を線形関数として次のように定める。

$$m_{G_i}=\begin{cases}0\ ;\ Z_i(\boldsymbol{x})<Z_i^m \text{のとき}\\ \dfrac{Z_i(\boldsymbol{x})-Z_i^m}{Z_i^0-Z_i^m}\ ;\ Z_i^m\leqq Z_i(\boldsymbol{x})<Z_i^0 \text{のとき}\\ 1\ ;\ Z_i^0\leqq Z_i(\boldsymbol{x})\ \text{のとき}\end{cases} \tag{12}$$

ここで，いくぶんか恣意的に希望水準 $Z_i^0$や許容限界水準 $Z_i^m$の組合せのいくつかを，まとめて示したものが**第 1 表**である。そして第 1 表のファジィ目標設定のタイプ $A_1$～$A_4$およびB～Dのそれぞれについて，メンバシップ関数の規定を行い（5）式～(6．c）式のように通常の線形計画問題に変換した後に，各タイプの最適解および目的関数値 $\lambda$ を求めて示したのが**第 2 表**である。

**第 1 表　様々なファジィ目標の設定**

| | $Z_1^0$ | $Z_2^0$ | $Z_1^m$ | $Z_2^m$ |
|---|---|---|---|---|
| タイプ$A_1$ | 150 | 150 | 100 | 100 |
| タイプ$A_2$ | 150 | 150 | 50 | 50 |
| タイプ$A_3$ | 140 | 140 | 50 | 50 |
| タイプ$A_4$ | 140 | 140 | 100 | 100 |
| タイプB | 80 | 200 | 20 | 140 |
| タイプC | 100 | 80 | 40 | 30 |
| タイプD | 150 | 200 | 120 | 160 |

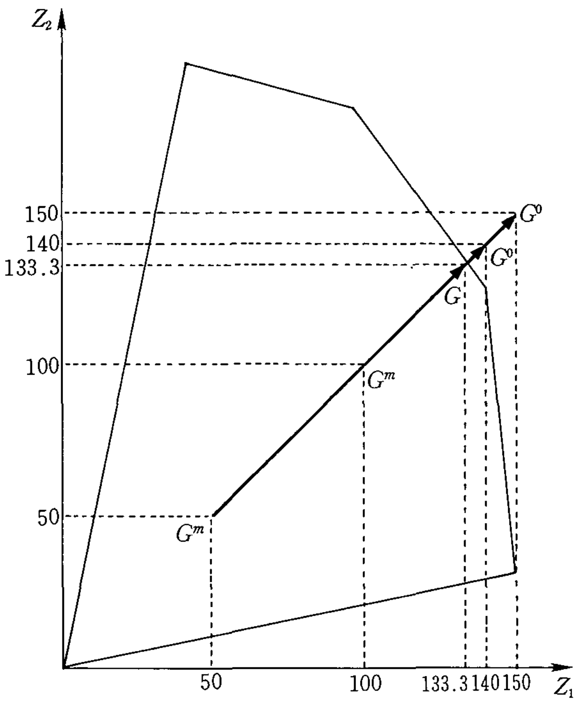
**第 2 表　様々なファジィ目標のもとでの最適解**

| | $\boldsymbol{x}^0$ | $\lambda$ | $Z_1(\boldsymbol{x}^0)$ | $Z_2(\boldsymbol{x}^0)$ |
|---|---|---|---|---|
| タイプ$A_1$ | (22.2, 22.2) | 0.66 | 133.3 | 133.3 |
| タイプ$A_2$ | (22.2, 22.2) | 0.83 | 133.3 | 133.3 |
| タイプ$A_3$ | (22.2, 22.2) | 0.93 | 133.3 | 133.3 |
| タイプ$A_4$ | (22.2, 22.2) | 0.83 | 133.3 | 133.3 |
| タイプB | (36.9, 6.9) | 0.86 | 71.5 | 191.5 |
| タイプC | (17.9, 24.6) | 1.68 | 141.0 | 114.2 |
| タイプD | 最適解なし | — | —— | —— |

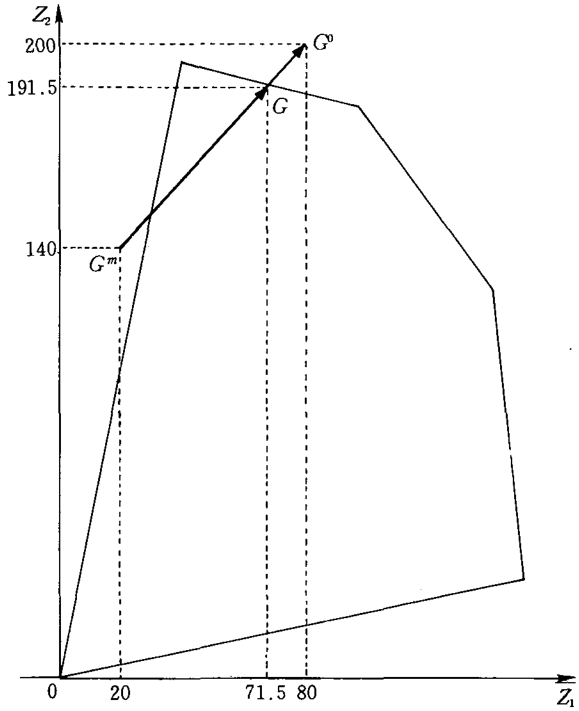
（1）　タイプ $A_1$～$A_4$のファジィ決定

目標平面上に可能領域およびタイプ $A_1$～$A_4$の希望ベクトルと達成ベクトルをまとめて描いたのが**第 3 図**である。また変数平面上に可能領域とタイプ $A_1$～$A_4$のファジィ決定を図解したのが**第 4 図**である。第 4 図はタイプ $A_1$～$A_4$に対して共通した図となっている。

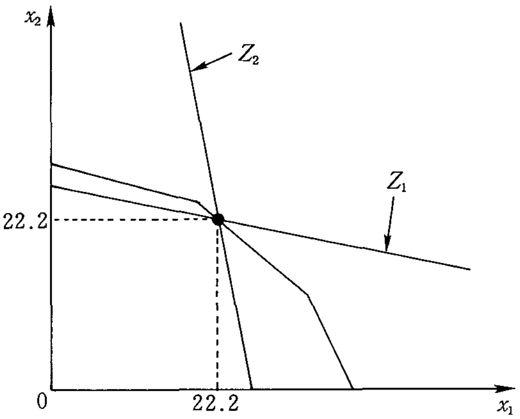
第 3 図において希望ベクトル$\overrightarrow{G^mG^0}$の数は，タイプ $A_1$～$A_4$に基づき 4 本である。勾配はいずれのタイプも同じであることより，各タイプのベクトルは図のなかで重なっている。希望ベクトルは $G^m=$（50, 50）を起点として，$G^0=$（140, 140）を終点とするもの，あるいは $G^0=$（150, 150）を終点とするものがある。また同様に $G^m=$（100, 100）を起点として，$G^0=$（140, 140）や $G^0=$（150, 150）を終点とする 2 本の希望ベクトルもある。これら 4 本の希望ベクトルのノルムはそれぞれ異っているが，それらは



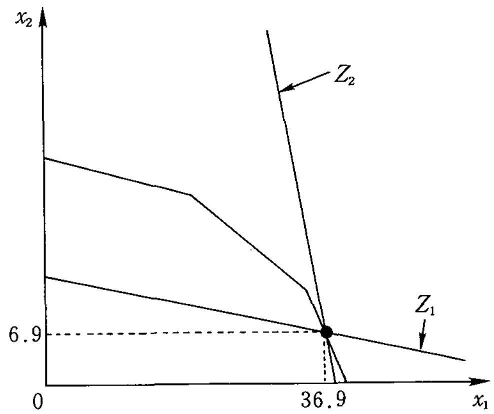

第３図　A₁～A₄の目標平面図




第５図　Bの目標平面図




第４図　A₁～A₄の変数平面図




第６図　Bの変数平面図

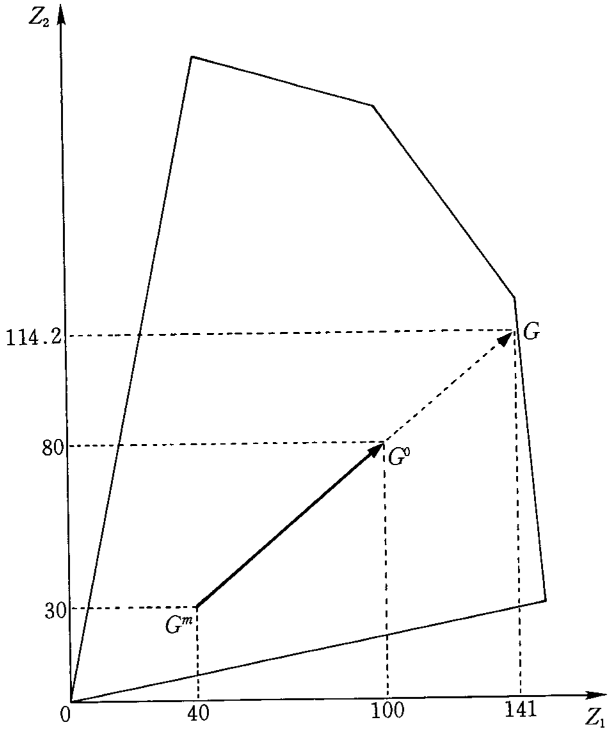
noninferior setとすべて同じ座標点$G$で交わる。すなわち４本の希望ベクトルにつき，各々の達成ベクトル$\overrightarrow{G^mG}$の終点$G$は同一点である。第２表からわかるように最適解は点$G$（133.3，133.3）で得られる。

以上のことより次のことが明らかになる。希望ベクトルや達成ベクトルのノルムの大小は，最適解の値を変化させる要因とはならない。それらは目的関数値$\lambda$の値を変化させるにすぎない。希望ベクトルがnoninferior setと交わるならば，そのベクトルの勾配が不変である限り，ベクトルのノルムの大小は解の値を変化させる要因とはならない。このことはあいまい部分あるいは許容部分の大きさ（$Z_i^0-Z_i^m$）

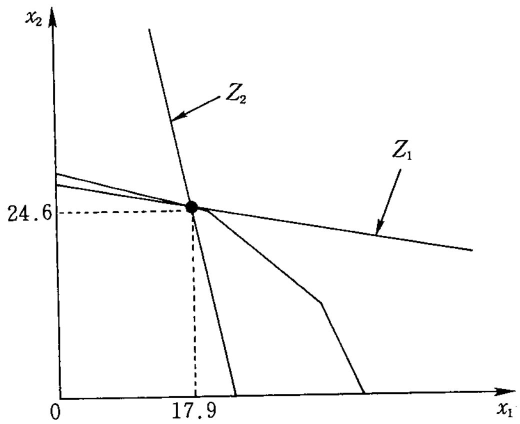
は，解の値そのものを変化させる要因とはならないことを意味している。希望ベクトルの起点が与えられると，解の値を変化させる要因となるのはノルムの大小ではなく勾配の変化である。

他方，次のこともいえる。解が得られるための条件は，希望ベクトルと達成ベクトルが存在すること，換言すれば点 $G^m$ と点 $G^0$ ならびに点 $G$ が存在することである。このことは各目標に対して希望水準 $Z_i^0$ を与えるだけでは解は得られない，解を得るためには許容限界水準 $Z_i^m$ の付与が必要な条件であることを意味している。

（2） タイプB～Dのファジィ決定




**第7図 Cの目標平面図**

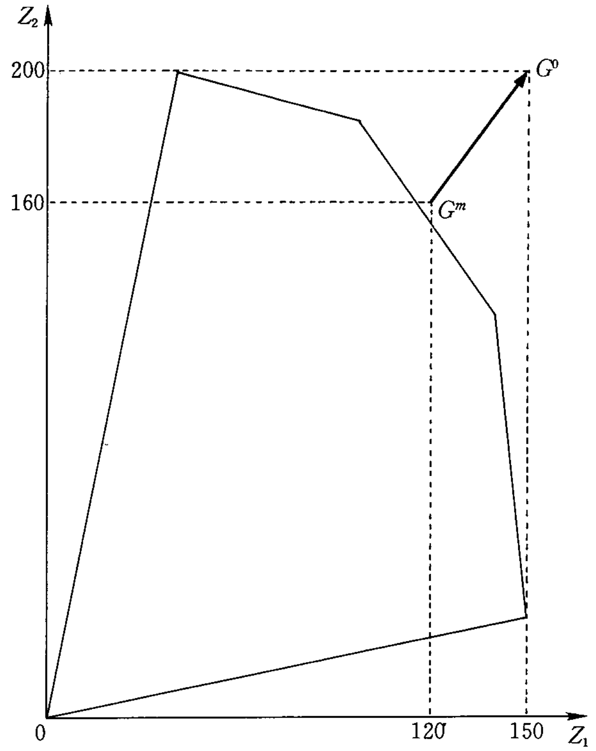



**第8図 Cの変数平面図**

タイプBの目標平面図は**第5図**に描かれている。希望ベクトルの起点は $G^m=(20,\ 140)$ で終点は $G^0=(80,\ 200)$ であり，したがって許容限界点 $G^m$ と満足点 $G^0$ はともに可能領域の外部に位置している。しかし希望ベクトルは noninferior set と交わっており，達成ベクトルの終点 $G$ は noninferior set 上にあるので解は存在する。タイプBのようなファジィ目標の設定について，変数平面上に可能領域とその目標設定に対するファジィ決定を図解したのが**第6図**である。第5図と第6図は，達成ベクトルのすべてが可能領域の内部になくても，そのベクトルの終点が noninferior set上にあれば解は存在することを示している。

タイプCの満足点は $G^0=(100,\ 80)$ であり，**第7図**からわかるように希望ベクトルのすべてが可能領域の内部にある。ただし希望ベクトルの延長線は noninferior set と交わる。このようなファジィ目標の設定をした場合，変数平面上でのファジィ決定は**第8図**のようになる。第7図と第8図は，希望ベクトルの起点と終点がともに可能領域の内部にあっても，最適解は希望ベクトルの延長線上の noninferior set と交わるところで得られることを示している。なお達成ベクトルの終点は希望ベクトルの延長方向にあり noninferior set と交わる点となる。この場合，達成ベクトルのノルムの方が希望ベクトルのノルムより大きいので $\lambda$ の値は1の値を超えることになる。

タイプDの満足点は $G^0=(150,\ 200)$ であ




第9図　Dの目標平面図

り，許容限界点は $G^m=(120,\ 160)$ である。第9図を見ると，希望ベクトルのすべてが可能領域の外部にあり，ベクトルの北東方向への延長線は noninferior set と交わらない。希望ベクトルの延長方向に noninferior set はなく達成ベクトルが定義できない場合，不能となり解は存在しない。このことはファジィ目標の設定の仕方次第では（たとえば満足点や許容限界点がともにかなり高い数値をとる場合には），不能となる可能性があることを示唆している。逆説的に言えば，ある満足点を与えたうえで許容限界点をかなり低く設定すれば希望ベクトルは noninferior set と交わる可能性が高くなるということになる。このことは許容部分あるいはあいまい部分 $(Z_i^0-Z_i^m)$ が大きくなるほど，希望ベクトルは noninferior set と交わるがい然性が高まり，それに従い解が得られる可能性も高くなることを意味している。

### 6.2　目標および制約条件がファジィな場合のファジィ決定

ファジィ目標を規定するメンバシップ関数の定義式（12）式において，$Z_1^0=150$，$Z_2^0=200$，$Z_1^m=40$，$Z_2^m=30$であるとする。

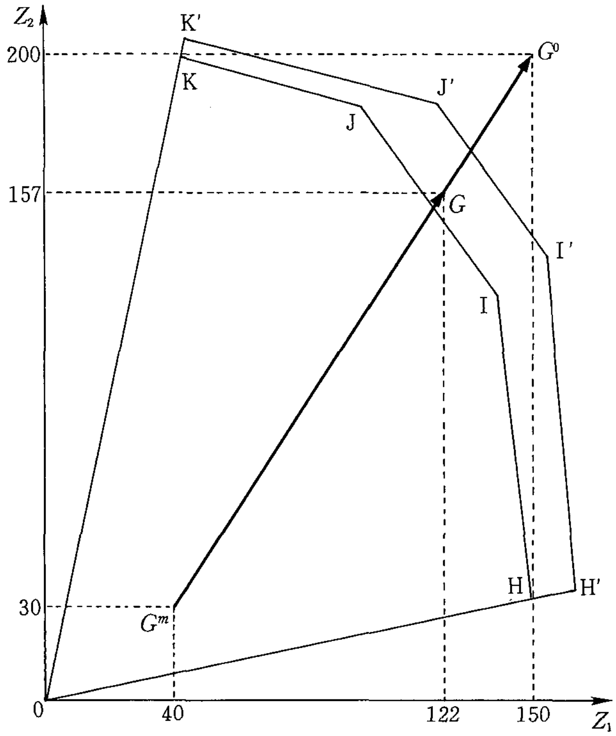
次に（11. a）～(11. c）式の制約条件にファジィ性を導入する。そのため制約条件の各々に対して，ファジィ制約を規定するメンバシップ関数を線形関数として以下のように定める。

$$m_{c1}=\begin{cases} 0 & ;\ 9x_1+4x_2\geqq 370\text{のとき} \\ \dfrac{370-(9x_1+4x_2)}{370-360} & ;\ 360<9x_1+4x_2<370\text{のとき} \\ 1 & ;\ 9x_1+4x_2\leqq 360\text{のとき} \end{cases} \tag{13}$$

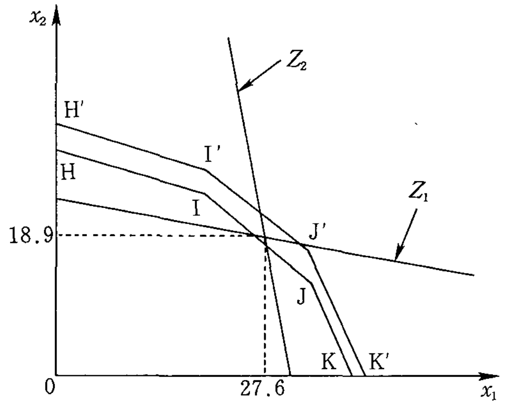
$$m_{c2}=\begin{cases} 0 & ;\ 4x_1+5x_2\geqq 220\text{のとき} \\ \dfrac{220-(4x_1+5x_2)}{220-200} & ;\ 200<4x_1+5x_2<220\text{のとき} \\ 1 & ;\ 4x_1+5x_2\leqq 200\text{のとき} \end{cases} \tag{14}$$

$$m_{c3}=\begin{cases} 0 & ;\ 3x_1+10x_2\geqq 330\text{のとき} \\ \dfrac{330-(3x_1+10x_2)}{330-300} & ;\ 300<3x_1+10x_2<330\text{のとき} \\ 1 & ;\ 3x_1+10x_2\leqq 300\text{のとき} \end{cases} \tag{15}$$

ファジィ目標とファジィ制約のメンバシップ関数が線形であるから，ふつうの線形計画の問題になお




**第10図　制約条件がファジィな場合の目標平面図**




**第11図　制約条件がファジィな場合の変数平面図**

すことができる。それは次のようである。

目的関数：$\lambda$ →最大化　　(16)

制約条件：$x_1+5x_2-110\lambda \geqq 40$　　(17. a)

$5x_1+x_2-170\lambda \geqq 30$　　(17. b)

$9x_1+4x_2+10\lambda \leqq 370$　　(17. c)

$4x_1+5x_2+20\lambda \leqq 220$　　(17. d)

$3x_1+10x_2+30\lambda \leqq 330$　　(17. e)

$x_1,\ x_2 \geqq 0$　　(17. f)

この線形計画の問題を解くと，最適解は $\boldsymbol{x}^0=(27.6,\ 18.9)$，それより $Z_1(\boldsymbol{x}^0)=122.1$，$Z_2(\boldsymbol{x}^0)=157$となり，また $\lambda$ の値は $\lambda=0.74$となる。これを図示したのが**第10図**および**第11図**である。

双方の図のH～Kはもとの可能領域，つまり目標のみファジィな場合の可能領域の境界線である。他方，H'～K'は制約条件にファジィ性を導入した場合の可能領域の境界線である。

目標のみにファジィ性をもたせた場合には，希望ベクトルは noninferior set と交わり，その交点において最適解が得られた。しかしながら制約条件にファジィ性をもたせると，noninferior set が特定できなくなるものと考えられる。たとえば第10図ならびに第11図を見ると，達成ベクトルの終点はもとの可能領域と制約条件にファジィ性をもたせた場合の可能領域との間の間げき部分に位置している。それよりファジィ制約の場合には，最適解は可能領域の境界線上ではなく，その内部で得られることが確認される。この点が目標のみファジィな場合と異なる点である。

しかし制約条件にファジィ性を導入しても，目標平面において希望ベクトルと達成ベクトルとは同一直線上にあり重なる。また希望ベクトルのノルムに対する達成ベクトルのノルムの比率は $\lambda$ の値に等しい。これらの2点は目標のみファジィ性をもたせた場合と同様に依然として成立する。なお後者の $\lambda$ の

値についての説明は次のようである。

希望ベクトルのノルムは202 $(=\sqrt{(150-40)^2+(200-30)^2}$ であり，達成ベクトルのノルムは151 $(=\sqrt{(122-40)^2+(157-30)^2}$ と計算できる。両者の比率は0.74 $(=\frac{151}{202})$ であることにより，その数値は $\lambda$ の値に等しい。

## 7. お わ り に

ファジィ多目的線形計画法の構造や性格を調べるために次のようなことを行った。まず noninferior set の概念を紹介し，新しいベクトル概念(希望ベクトルと達成ベクトル)を導入した。それに続いて様々なファジィ目標の設定を行い，さらに制約条件にファジィ性をもたせたケースを取り上げ，それらの数値計算とその結果に基づいて目標空間および変数空間におけるファジィ決定の図解を行った。そうすることによってファジィ多目的線形計画法の考え方の理解を高めることができた。まずファジィ目標の設定の仕方には多様性があることを確認するとともに，どのようなファジィ目標の設定の仕方をした場合には，最適解が存在するか否かを考察した。また解の値を変化させる要因は何かについても考察した。さらに制約条件にファジィ性をもたせた場合においての $\lambda$ の性質を明らかにした。

本稿において，この計画法について次の性質があることを示した。

性質Ⅰ　希望ベクトルの起点が与えられると，解の値を変化させる要因はベクトルのノルムの大小ではなく勾配の変化である。

性質Ⅱ　希望ベクトルの起点が可能領域外にあるとしても，ベクトルが noninferior set と交わればその交点で解が得られる。

性質Ⅲ　希望ベクトルのすべてが可能領域の内部にあるとしても，ベクトルの北東方向への延長線が noninferior set と交われば，その交点で解が得られる。

性質Ⅳ　希望ベクトルのすべてが可能領域外にあり，ベクトルの北東方向への延長線が noninferior set と交わらないとすれば，不能となり解は存在しない。

性質Ⅴ　ファジィ目標の希望水準が与えられているとして，それを基準にして許容限界水準が相対的に小さい値をとれば，それにより希望ベクトルのノルムが大きくなるほど，ベクトルは noninferior set と交差するがい然性が高まり，それにともない解を得ることができる可能性も高まる。

性質Ⅵ　制約条件にファジィ性をもたせても，希望ベクトルと達成ベクトルは同一直線上にあり重なる。また希望ベクトルのノルムに対する達成ベクトルのノルムの比率は $\lambda$ の値に等しい。

## 脚　　注

1）山口・永沼〔11〕。

2）拙稿〔10〕。

3）Cohon〔2〕。

4）拙稿〔10〕。この計画法について次の性質があることを示した。

性質Ⅰ　目標空間において希望ベクトルと達成ベクトルとは同一直線上にあり重なる。したがって総合的な目標方向と総合的な達成方向は完全に一致する。

性質II　希望ベクトルは，北東方向にもはや可能解が存在しないような境界線上の解集合 noninferior set と交わる。その交点において最適解が得られる。

性質III　最適解は実行可能領域の境界線上にありパレート最適解である。

性質IV　希望ベクトルのノルムに対する達成ベクトルのノルムの比率は $\lambda$ の値に等しい。

性質V　最大の満足度 $\lambda_{max}$ は達成ベクトルの終点で得られる。そして可能領域のなかで $\lambda_{max}$ となる点が最適解である。

## 参　考　文　献


〔1〕Bellman, R.E., and Zadeh,L.A., "Decision Making in a Fuzzy Environment,", *Management Science*, Vol. 17, No. 4, December, 1970, pp. 141-164.

〔2〕Cohon. J.L., *Multiobjective Programming and Planning*, New York: ACADEMIC PRESS, 1978.

〔3〕伏見・福川・山口，『経営の多目標計画』，森北出版，1987年。

〔4〕Hannan, E.L., "Linear Programming with Multiple Fuzzy Goals,", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 6, 1981, pp. 235-248.

〔5〕小林三郎，「目標計画法」『経営数学』，高文堂出版社，1981年，所収，24－34ページ。

〔6〕Leberling, H., "On Finding Compromise Solution in Multicriteria Probrems Using the Fuzzy Min -Operator," ,*Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 6 ,1981,pp.105－118.

〔7〕森口繁一，『線形計画法入門』，日科技連，1987年。

〔8〕西田・竹田，『ファジィ集合とその応用』，森北出版，1986年。

〔9〕坂和正敏，『線形システムの最適化——目的から多目的へ—』，森北出版，1984年。

〔10〕下條・上田，「ファジィ多目的線形計画問題に対する一考察—目標空間における図解と最適解の性質について—」『甲南大学紀要　理学編』（甲南大学），Vol. 38，No. 1，1991年7月印刷完了予定。

〔11〕山口・永沼，「ファジィ目標計画問題に対する一考察—目標空間における図解—」『オペレーションズ・リサーチ』日本オペレーションズ・リサーチ学会，Vol. 34，No. 6，1989年6月，257—263ページ。

〔12〕山口・香月，「多様な目標に対応したファジィ目標計画法」『日本経営工学会誌』日本経営工学会，Vol. 40，No. 5，1989年12月，352—356ページ。

〔13〕Zadeh, L.A., "Fuzzy Sets,", *Information and Controll*,Vol. 8, No. 3, 1965, pp. 338-353.

〔14〕Zimmerman, H.J., "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions,", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 1, 1978, pp. 45-55.