ファジィ多目的線形計画問題のグラフ解法

A Graphic Solution of Fuzzy Multiobjective Linear Programming Problem

(1993年4月7日受理)

上　田　仁　郎
Niro Ueda

Key words: ファジィ多目的線形計画問題, シンプレックス解法, グラフ解法

1. は じ め に

企業経営において, 意思決定者は複数の目標 (goals) とか複数の計画に対峙している. そのような計画問題に対して, ファジィ多目的計画法 (Fuzzy Multiobjective Programming) とよばれる数学的接近法が開発され, 一般に紹介されている. しかしながら, そこでは数値例について数式演算による解法によって最適解が得られており,筆者の知る限り,図・グラフによる解法は明示的には示されてこなかった. そこで本稿では, ファジィ多目的線形計画問題のグラフによる解法を試論的に示す. そのため次節 (第2節) では議論の手がかりを得るために, H. J. Zimmermann によるファジィ多目的線形計画法の成り立ちをおってみる. 第3節では具体的に2目標2変数の数値例を取り上げ, 目標にファジィ性を織り込んだうえでシンプレックス法によって最適解を求める. 第4節では, グラフ解法の展開に対する予備的知識として, すでに拙稿〔5〕によって明らかにされたファジィ計画法の図解上の諸性質が紹介される. それに基づいて第5節では, 第3節で取り上げた同じ数値例に関して, グラフ解法によって最適解を求める. グラフ解法の手順は, 実行可能解集合の図示, 目的関数の図示, ついで最適解の図示, λ の決定という順で進められる. そして, そこにおいて最適解および λ の値は, シンプレックス解法による演算結果と同一であることが明らかにされる. さらにグラフ解法の続きとして, 影の価格 (shadow price), ならびに $\lambda = 1$ となるための条件が明らかにされる.

2. ファジィ多目的線形計画問題

H. J. Zimmermann のファジィ多目的線形計画法の成り立ちをおってみよう. Zimmermann は, 1976年ファジィ目標とファジィ制約のある線形計画問題に対して, メンバシップ関数が線形の関数であると仮定して, Bellmann・Zadeh〔1〕の最大化決定を採用すれば通常の線形計画問題として解けることを示した.

そして1978年, Zimmermann〔3〕は彼の手法をファジィ多目的線形計画問題に拡張した. ここにいうファジィ多目的線形計画問題とは, 複数個のファジィ目標のある線形計画問題を意味する.

いま，k 個の線形の目的関数の存在する次の多目的線形計画問題について考えてみよう．

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad Z_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} \\
&\text{maximize} \quad Z_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\text{maximize} \quad Z_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_k\boldsymbol{x} \\
&\text{subject to} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで，$\boldsymbol{c}_i = (c_{i1}, \ c_{i2}, \ \cdots, \ c_{in})$ $\quad (i = 1, 2, \cdots, k)$，

$\boldsymbol{x} = (x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n)^T$，$\boldsymbol{b} = (b_1, \ b_2, \ \cdots, \ b_m)^T$ で $\boldsymbol{A}$ は m × n の行列である．

この問題の各々の目的関数に対して意思決定者は，目標 $G_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ の達成水準 $Z_i(\boldsymbol{x})$ を「だいたい Z_i^0 以上にしたい」というようなファジィな目標の設定を行うものとする．

それより（1）式の多目的線形計画問題に対して，ファジィ多目的線形計画問題は次のように定式化される．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} \gtrsim Z_1^0 \\
&\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x} \gtrsim Z_2^0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\boldsymbol{c}_k\boldsymbol{x} \gtrsim Z_k^0 \\
&\text{subject to} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここで便宜上用いた記号「$\gtrsim$」はファジィ不等号を表しており，「$\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x} \gtrsim Z_i^0$」は，「目的 $\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x}$ をだいたい Z_i^0 以上にしたい」ということを意味している〔8〕．

このファジィな目標においては，たんなる最大化ではなく，意思決定者がある希望水準 Z_i^0 をもっており，それをできるだけ満たすということがファジィ目標という意味である．その場合，達成水準が希望水準 Z_i^0 以上ならばメンバシップ関数の値が 1 をとり，Z_i^0 以下ならば 0 よりは大きいが 1 よりは小さい値をとり，Z_i^m 以下ならば 0 をとるようなメンバシップ関数によって特性づけられるものとする（Z_i^m を以下では許容限界水準とよぶ）．

これより Zimmermann は，各目的関数に対する意思決定者のファジィ目標 G_i を次式で与えられる線形関数型メンバシップ関数で特性づけた．

$$
m_{Gi} = \begin{cases} 0 \ ; \ Z_i(\boldsymbol{x}) \leqq Z_i^m \ \text{のとき} \\[2ex] \dfrac{Z_i(\boldsymbol{x}) - Z_i^m}{Z_i^0 - Z_i^m} \ ; \ Z_i^m \leqq Z_i(\boldsymbol{x}) \leqq Z_i^0 \ \text{のとき} \\[2ex] 1 \ ; \ Z_i^0 \leqq Z_i(\boldsymbol{x}) \ \text{のとき} \end{cases}
\tag{3}
$$

そしてこのメンバシップ関数と最小オペレータを用いれば，与えられた多目的線形計画問題は，以下のように通常の線形計画問題に変換できることを Zimmermann は示した．

すなわち Bellmann と Zadeh のファジィ決定に対する最大化決定を採用すれば，与えられた多目的線形計画問題は，元の制約条件のもとで

$$
m_{Gi} = \max_{\boldsymbol{x} \geqq 0} \ \min_{0 \leqq i \leqq k} \left\{ \frac{Z_i(\boldsymbol{x}) - Z_i^m}{Z_i^0 - Z_i^m} \right\}
\tag{4}
$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ を求める問題になる．これは最小のメンバシップ関数値を最大にするような $\boldsymbol{x} \geqq 0$ を求める問題である．この問題は結局，次式で与えられる通常の線形計画問題に帰着される．

maximize λ

$$\text{subject to}\quad \lambda \leqq \frac{Z_i(\boldsymbol{x})-Z_i^m}{Z_i^0-Z_i^m} \qquad (i=1,2,\cdots k) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{O}.$$

もちろん，ファジィ制約が存在する場合もその制約に対するメンバシップ関数を線形の関数で与えれば，同様に処理できるが，以下本稿では Zimmermann と同様に希望水準 Z_i^0 のみにファジィ性をもたせた線形計画問題を扱う．

3．　数値例（シンプレックス法）

2つの製品A，Bの生産計画を立案したい．製品Aを1㎏作るために，労力が9人日，重油4 kℓ，電力3 kWh が必要である．製品Bを1㎏作るために，労力が4人日，重油5 kℓ，電力10kWh が必要である．

目標 Z_1 の値に対して，製品AとBの1㎏当たりの貢献度がそれぞれ1，5とする．他方，目標 Z_2 の値について，製品AとBの1㎏当たりの貢献度はそれぞれ5，1とするとき，目標 Z_1 と Z_2 の値を最大にしたい．

以上のような2目標2変数の数値例を考える．製品A，Bの生産高を x_1，x_2 とすると，上の条件は次のように書ける．

目的関数：　$Z_1(\boldsymbol{x})=x_1+5x_2\rightarrow$ 最大化

　　　　　$Z_2(\boldsymbol{x})=5x_1+x_2\rightarrow$ 最大化

制約条件：　$9x_1+4x_2\leqq 360$　　労力

　　　　　$4x_1+5x_2\leqq 200$　　重油　　　　　　　　　　　　(6)

　　　　　$3x_1+10x_2\leqq 300$　　電力

　　　　　$x_1,\ x_2,\ \geqq 0$

そして（6）式の目的関数に対するファジィ性の導入の仕方は，言葉で表現すれば次のようなものになると想定する．

ファジィ目標 G_1「Z_1 の値は40から150の範囲にあればよいが，できるだけ150に近づけたい」，

ファジィ目標 G_2「Z_2 の値は30から100の範囲にあればよいが，できるだけ100に近づけたい」．

ファジィ目標 G_1 というのは，意思決定者が望ましい領域についての，主観的でファジィな概念をもつ状況のなかで現われる〔2〕．また上述の「Z_i の値は Z_i^m から Z_i^0 の範囲にあればよいが，できるだけ Z_i^0 に近づけたい」という表現は，「希望水準 Z_i^0 以上であれば十分満足だが，許容限界水準 Z_i^m までなら満足の度合は低下するが許容できる〔9〕」というような意味をもつ．

メンバシップ関数（3）式を規定する定数は，$Z_1^0=150$，$Z_1^m=40$，$Z_2^0=100$，$Z_2^m=30$である．これらの値からなるメンバシップ関数と最小オペレータを用いれば，与えられた（6）式のファジィ多目的線形計画問題は以下の線形計画問題に変換される．

制約条件：　$9x_1+4x_2\leqq 360$　　労力　　　　　　　　　　　　(7．1)

　　　　　$4x_1+5x_2\leqq 200$　　重油　　　　　　　　　　　　(7．2)

　　　　　$3x_1+10x_2\leqq 300$　　電力　　　　　　　　　　　　(7．3)

$$x_1 + 5x_2 - 110\lambda \geqq 40 \tag{7.4}$$

$$5x_1 + x_2 - 70\lambda \geqq 30 \tag{7.5}$$

$x_1, x_2 \geqq 0$ のもとで

$$\text{maximize} \quad \lambda. \tag{7.6}$$

この線形計画法の計算は，まず（7．1）式 ～（7．5）式の不等式にスラック変数と人為変数を入れて正規型に変換する．ついで正規型の線形計画法を，シンプレックス表（Big M Method）とよばれる表の形にして進める．

シンプレックス表の初めの表は**第1表**である．

第1表　シンプレックス表

M = $\boxed{10000}$

〔データ表〕　〔スラック変数表〕

基底変数	値	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-7E+05	-60000	-60000	2E+06	10000	10000	0	0	0	0	0
6	360	9	4	0	0	0	1	0	0	0	0
7	200	4	5	0	0	0	0	1	0	0	0
8	300	3	10	0	0	0	0	0	1	0	0
9	40	1	5	-110	-1	0	0	0	0	1	0
10	30	5	1	-70	0	-1	0	0	0	0	1

第1表の上のへりの1，2，…，10および基底変数6，7，…10 は下記の変数を意味している．

$1 = x_1$（製品Aの生産；kg），$2 = x_2$（製品Bの生産；kg），$3 = \lambda$，4 =（7．4）式の人為変数，5 =（7．5）式の人為変数，6 =（7．1）式のスラック変数，7 =（7．2）式のスラック変数，8 =（7．3）式のスラック変数，9 =（7．4）式のスラック変数，10=（7．5）式のスラック変数．ただし各スラック変数および人為変数は非負．

第2表　最　　適　　解

〔シンプレックス表〕

基底変数	値	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.9365	0	0	0	0.0085	0.0009	0	0	0.0043	9999.9	9999.9
6	131.19	0	0	0	-0.989	1.5543	1	0	-0.739	0.9891	-1.554
7	15.126	0	0	0	-0.317	0.4981	0	1	-0.608	0.3170	-0.498
3	0.9365	0	0	1	0.0085	0.0009	0	0	0.0043	-0.008	-0.000
2	25.815	0	1	0	-0.038	0.0597	0	0	0.0869	0.0380	-0.059
1	13.949	1	0	0	0.1268	-0.199	0	0	0.0434	-0.126	0.1992
3											

シンプレックス表の最終の表は**第2表**である．それによると最適解は $x_1 = 13.9$，$x_2 = 25.8$，$\lambda = 0.93$となる．また電力資源の貢献度（影の価格）は，電力1単位（1kWh）につき0.0043である．

原問題は（6）式であることより，最適解を代入すれば，$Z_1(\boldsymbol{x}) = 142$，$Z_2(\boldsymbol{x}) = 95$となる．

よく知られているように，線形計画法は未知数が2個の場合には平面上のグラフによって簡単に，しかも見とおしよく，解が求められるのであるが，（7）式のように未知数が3個（x_1，x_2，λ）となると図解法はきわめて困難となることが予想される．そこで，本文においてグラフ解法を試みる準備段階として，次節では拙稿〔5〕で示したベクトル概念とファジィ計画法の図解上の諸性質を示す．

4．ベクトル概念とファジィ決定

4．1　ベクトル概念

さて2つの目標の達成値 Z_1, Z_2 を座標軸にした目標空間には，満足点および許容限界点とでもよぶべき次の2点を定義できる．

$G^0 = (Z_1^0,\ Z_2^0)$ ：満足点

$G^m = (Z_1^m,\ Z_2^m)$ ：許容限界点

G^m を起点とし G^0 を終点とするこの2点を結んだ有向線分，$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{G^mG^0}$ を希望ベクトルとよぶことにする．希望ベクトルは2つの目標の総合的な目標方向（各目標の重視の度合）を示している．

他方，目標空間には達成点とよばれる点も定義できる．

$G = (Z_1,\ Z_2)$ ：達成点

G^m を起点とし G を終点とするこの2点を結んだ有向線分，$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{G^mG}$ を達成ベクトルとよぶことにする．達成ベクトルは，2つの目標の総合的な達成方向（各目標の実現の度合）を示している．

4．2　ファジィ計画法の図解上の諸性質

以上のようにベクトル概念を定義すると，ファジィ多目的線形計画法について次の性質があることが示される．

性質Ⅰ　目標空間において希望ベクトルと達成ベクトルは同一直線上にあり重なる．したがって総合的な目標方向と総合的な達成方向は完全に一致する．

性質Ⅱ　希望ベクトルは，北東方向にもはや可能解が存在しないような境界線上の解集合 noninferior set と交わる．

性質Ⅲ　最適解は実行可能解集合の境界線上にありパレート最適解である．

性質Ⅳ　希望ベクトルのノルムに対する達成ベクトルのノルムの比率は λ の値と等しい．

性質Ⅴ　最大の満足度 $\lambda_{\max}$ は達成ベクトルの終点で得られる．そして可能解集合のなかで $\lambda_{\max}$ となる点が最適解である．

次節ではこれらの性質を用いて，第3節の数値例に対するグラフ解法を示す．

5．グラフ解法

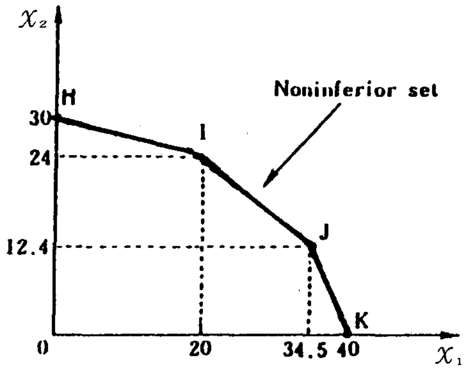
5．1　実行可能解集合の図示

まず，（6）式の実行可能解集合および noninferior set はどのようなものであるかをみておこう．

実行可能解集合は（6）式の制約条件式を満たす解の集合である．それは**第1図**のようである．第1図の座標軸は決定変数 x_1 と x_2 で定義される．実行可能解集合は，縦軸と横軸そして実線 HI, IJ, JK で囲まれた領域である．

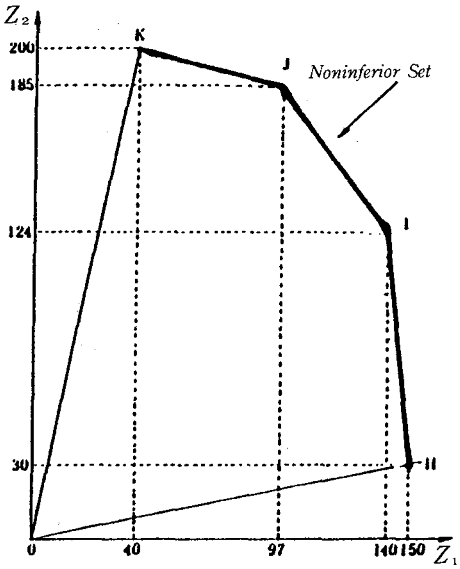
第1図の各端点は2つの決定変数 x_1, x_2 と2つの目標値 Z_1, Z_2 を与える．第1図の端点から Z_1, Z_2 の数値を求めれば，目標空間における端点がえられる．このようにして第2図が導出される．

第2図のグラフの座標軸は，目標の達成値 Z_1, Z_2 で定義される．各端点は直線で結びつけられる．そしてそれらは第1図における実行可能解集合の境界線に対応する．目標空間における noninferior set



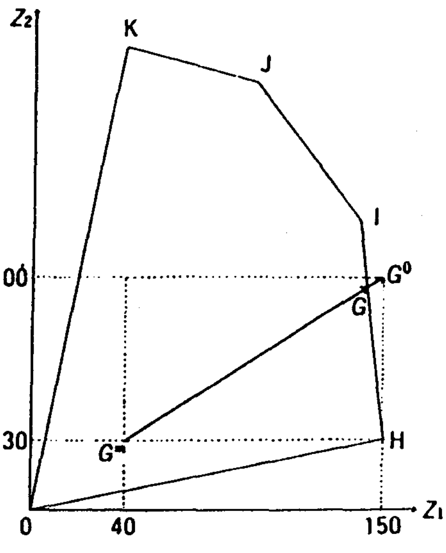
第１図　変数空間の図示

は，各端点 H，I，J，K およびそれら各点を結んだ直線上にある．すなわち Z_1-Z_2 平面における５面体の東北部境界線上に位置する．



第２図　目標空間の図示

5．2　目的関数の図示



第３図　目的関数の図示

ステップ１：　希望ベクトルを図示する

数値例でのファジィ目標は，目標空間において下記の２点として図示できる．

$G^0 = (150,\ 100)$：　満足点

$G^m = (40,\ 30)$：許容限界点

それより希望ベクトル $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{G^m G^0}$ を目標空間に描く．

ステップ２：　達成点Ｇを記す

希望ベクトルは境界線 HI 上で，すなわち解集合の noninferior set と交わる．その交点において最適解が得られる（前節の性質Ⅱ）．

そこでその交点を点Ｇとし図中に記す．

ステップ３：　達成ベクトルを図示する

達成ベクトルは希望ベクトルと同一直線上にあり重なる（前節の性質Ⅰ）．そこで第３図に達成ベクトル　$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{G^m G}$ を記す．

ステップ４：　達成点Ｇの座標を求める

最適解は実行可能解集合の境界線 HI 上にありパレート最適解である（性質Ⅲ）．第３図の点Ｇでパレート最適解が得られることにより，点Ｇの座標を得るために，希望ベクトル $\boldsymbol{u}$ の直線の方程式を求めると，　$0.63Z_1 - Z_2 = -4.5$　となる．

点Ｇは希望ベクトル $\boldsymbol{u}$ と直線 HI の交点であるから，つぎに直線 HI の方程式を求めると，$9.4Z_1 + Z_2 = 1440$　となる．　点Ｇの座標は，この２本の連立１次方程式を解いて求めることができる．それは　$Z_1 = 142$，$Z_2 = 95$　となる．この値は２つのファジィ目標 G_1，G_2 における達成値である．

ステップ5： 最適解をえる

目的関数 $Z_1 = x_1 + 5x_2 = 142$ および $Z_2 = 5x_1 + x_2 = 95$ より最適解 $x_1 = 13.9$, $x_2 = 25.8$ が得られる.

5．3 λの決定

(7．1)〜(7．6)式の最適解λの値は，希望ベクトルのノルムに対する達成ベクトルのノルムに等しい（前節性質Ⅳ）．希望ベクトルのノルムは，130($=\sqrt{(150-40)^2+(100-30)^2}$) である．他方，達成ベクトルのノルムは，121($=\sqrt{142-40)^2+(95-30)^2}$) である．それよりλの値は0.93($=\frac{121}{130}$) となる．

以上のようにして最適解 x_1, x_2, λの値をグラフ解法によって求めることができた．そして，それらの値はシンプレックス表による表計算の結果と完全に一致するのである．

5．4 影の価格（shadow price）を求める

前節の性質Ⅴより「最大の満足度 $\lambda_{\max}$ は達成ベクトルの終点Gで得られる」．そこで（7）式の電力の制約 $3x_1 + 10x_2 \leqq 300$ に関して，制約が300kWh から310kWh へと電力を10kWh 増やした場合の満足度λに与える影響を検討してみよう．

ステップ1： （6）式の制約不等式を変える

第1図における直線HIの方程式は，電力10単位増えることによって次式のようになる．

$3x_1 + 10x_2 = 310$ …… H′I′

直線H′I′と直線IJとの交点をI′とすると，点I′の変数空間の座標は I′(18, 25.6) であり，点I′の目標空間の座標は I′(146, 115) である．

ステップ2： 目標空間の座標を求める

変数空間の直線H′I′と縦の座標軸（x_2 軸）の交点をH′とすると，H′の変数空間の座標はH′(0 , 31) であり，その目標空間の座標は H′(155, 31) である．

ステップ3： λの値を求める

目標空間における点H′と点I′を結ぶ直線の方程式は $9.4Z_1 + Z_2 = 1488$ である．この直線と希望ベクトル $\boldsymbol{u}$ の直線との交点の座標は $Z_1 = 147.9$ $Z_2 = 97.68$ である．目標空間におけるこの点の座標をG′とする．点G′（147.9, 97.68）と点 G_m をつなぐ達成ベクトルのノルムは 127.36であり，他方希望ベクトルのノルムは以前の計算より130である．したがってλの値は，0.979($=\frac{127.36}{130}$) となる．

ステップ4： λに及ぼす影響の度合を求める

以上より電力10kWh 増やした場合の満足度λの増加分は，0.049（=0.979−0.93）となる．

シンプレックス解法によれば電力資源の貢献度（影の価格）は，電力10kWh につき0.043であった．グラフ解法による数値と若干の違いはある．しかし電力 1kWh の単位でみれば，かなり近似しており，双方の数値の違いは無視できる程度のものである．

5．5 λ=1となるための条件

電力の供給を増やせばλの値が増加することがわかったが，満足度λが最大（すなわちλ=1）となるためには，電力供給をどれだけ増やせばよいのであろうか．その条件としてλ=1となるためには，達成ベクトル $\overrightarrow{G^mG}$ のノルムが希望ベクトル $\overrightarrow{G^mG^0}$ のノルムと等しくならなければならない。そのために

は第3図の目標空間における直線 HI が，東北方向に平行移動して点 $G_0(150, 100)$ を通過しなければならない．したがって　目的関数：　$Z_1 = x_1 + 5x_2 = 150$　および　$Z_2 = 5x_1 + x_2 = 100$　の連立1次方程式を解いて，$x_1 = 14.58$　$x_2 = 27.08$を得る．この解は $\lambda = 1$ を満たす製品A，製品Bの生産量である．

これらを電力の供給方程式に代入すると　$3x_1 + 10x_2 = 314$　となる．したがって電力をもとの制約300kWh から14kWh 増加し，314kWh とすれば $\lambda = 1$ となる．

以上見てきたように，ファジィ多目的線形計画法は，2目標2変数の場合には，x_1-x_2 座標・Z_1-Z_2 座標上にグラフを描き，グラフ上で見通しよく最適解を求めることができるのである．

参 考 文 献

〔1〕 Bellman, R. E., and Zadeh, L. A., "Decision Making in a Fuzzy Environment,", Management, Sciense, Vol.17, No.4, December, 1970, pp.141－164.

〔2〕 Hannan, E. L., "Linear Programming with Multiple Fuzzy Goals,", Fuzzy Sets and Systems, Vol.6, 1981, pp.235－248.

〔3〕 Zimmermann, H. J., "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions,", ***Fuzzy Sets and Systems,*** Vol.1, 1978, pp.45－55.

〔4〕 浅居喜代治，『ファジィ経営科学入門』，オーム社，1992年．

〔5〕 拙稿，「ファジィ多目的線形計画問題に対する一考察－目標空間における図解と最適解の性質について－」『甲南大学紀要　理学編』（甲南大学），Vol.38, No.1, 1991年6月，21－30ページ．

〔6〕 拙稿，「ファジィ環境における意思決定について－ファジィ線形計画法の図解例による考察－」『中国短期大学　紀要』（中国短期大学），Vol.22, 1991年6月，369－380ページ．

〔7〕 坂和正敏，『ファジィ理論の基礎と応用』，森北出版，1990年．

〔8〕 西田・竹田，『ファジィ集合とその応用』，森北出版，1986年．

〔9〕 山口・永沼，『ファジィ目標計画問題に対する一考察－目標空間における図解－』『オペレーションズ・リサーチ』日本オペレーションズ・リサーチ学会，Vol.34, No.6, 1989年6月，257－263ページ．